UNIVERSITE DES LAGUNES **ANNEE 2022-2023**
Licence 3
Faculté de Sciences et Technologie

Analyse Convexe : Fiche TD

.

Exercice 1

1) Soit I un ensemble, $i \in I$ et A_i un ensemble convexe. Montrer que $\cap_{i\in I} A_i$ est un convexe.
2) Si A_i avec $i \in I$ sont des convexes de $\mathbb{R}^n$, Montrer que la somme des A_i est convexe dans $\mathbb{R}^n$
3) Montrer que toute intersection de convexes est convexe $\mathbb{R}^n$,.
4) Montrer que le produit cartésien fini de convexes est convexe $\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$.
5) Montrer que l'image d'un convexe par une application affine est convexe.

.

Exercice 2

I) Soit la fonction définie par $g(x) = x^\alpha y^\beta$.
ou α est un réel et $x > 0$. Etudier la convexité ou la concavité de g selon les valeurs de α.
II) Soit la fonction définie par $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$.
ou α et β sont des réels non nuls. Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ x > 0, y > 0\}$. On admet que C est un ouvert. Etudier la convexité ou la concavité de f sur C en discutant selon les valeurs de α et de β.

.

Exercice 3

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) = f(b) = 0$.
On note $M = Sup_{x\in[a,b]} \mid f'' \mid$ et $g(x) = f(x) - M\frac{(x-a)(b-x)}{2},\ et$
$h(x) = f(x) + M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$
1) Justifier l'existence de M
2) Montrer que g est convexe et que h est concave.
3) En déduire que pour tout $x \in [a, b]$ on a $\mid f(x) \mid \leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$

.

Exercice 4

Soit f une fonction convexe de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer que

$$(b-a)f(\frac{a+b}{2}) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

.

Exercice 5

Soient $\alpha,\ \beta$ et γ des nombres strictements positifs.
Montrer que les ensembles ci-dessous sont convexes.
a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ \alpha x^2 + \beta y^2 \leq \gamma\}$
b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ x^\alpha y^\beta \geq \gamma\}$
.

Exercice 6

Soit la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = xln(x)$
1) Montrer que f est convexe et endéduire que

$$\forall\ (a,b,x,y)\ \in (]0,+\infty[\ )^4, \quad (x+y)ln(\frac{x+y}{a+b}) \leq xln(\frac{x}{a}) + yln(\frac{y}{b})$$

Soit la fonction $g :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = -ln(ln(x))$
2) Montrer que g est convexe et endéduire que :

$$\forall\ (x,y)\ \in (]1,+\infty[\ )^2, \quad \sqrt{ln(x)ln(y)} \leq ln(\frac{x+y}{2})$$

Exercice 7

Etudier la convexité des ensembles ci-dessous.
$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y - (x-1)^2 \leq 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$
$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$
.

Exercice 8

1) Soient les fonctions $f :\ \mathbb{R}\ \to \mathbb{R}$ et $g :\ \mathbb{R}\ \to \mathbb{R}$ telles que f est convexe et g est convexe et croissante. Montrer que gof est convexe.
2) Si $f :\ \mathbb{R}\ \to \mathbb{R}$ et $g :\ \mathbb{R}\ \to \mathbb{R}$ est linéaire, montrer que fog est convexe.
3) Montrer que $f(x,y) = (\mid 2x + 3y \mid + \mid x - y \mid)^p$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$ pour $p \in]1,+\infty[$
.

Exercice 9

Soient C_1 et C_2 deux cones convexes de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $C_1 + C_2$ est un cone convexe et $C_1 + C_2 = conv(C_1 \cup C_2)$